Quantização do campo electromagnético

Andrés Delgado

Instituto de Física de São Carlos

andres.delgado@usp.br

12 de Junho de 2018

Overview

Introdução

- Lei de Rayleigh-Jeans $\longrightarrow$ para descrever a radiação espectral da radiação eletromagnética $\propto \nu^2$
- Lei de Planck $\longrightarrow$ para radiação de corpo negro
- Dirac propôs que as variáveis canônicas do oscilador de radiação pode ser tratados como operadores que não comutam

Introdução: oscilador harmônico

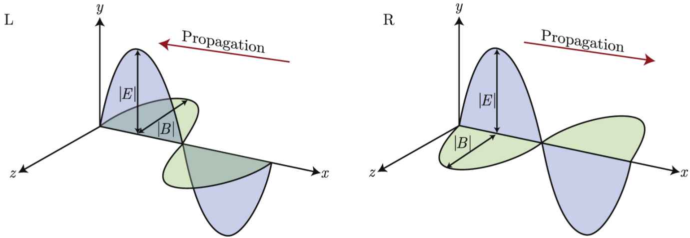
- O hamiltoniano de um oscilador harmônico de masa $m = 1$ e frequência ω é:

$$H_{OH} = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

- Os operadores p e q satisfazem a relação de comutação $[p, q] = i\hbar$.

$$\begin{cases} H_{OH} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \longrightarrow & \begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ E_n &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \end{cases}$$

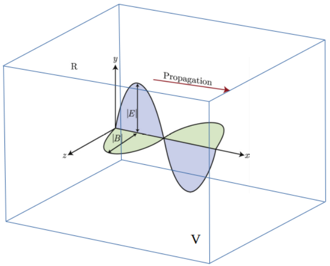
Descomposição espectral do campo electromagnético



$$\vec{E}\ ,\ \vec{B} \longrightarrow H = \frac{1}{2}\int \left(|B|^2 + |E|^2\right) d^3r$$

$$\begin{cases} \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) \\ \\ \vec{E}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \end{cases} \longrightarrow \quad \vec{E}\ ,\ \vec{B}\ ,\ H$$

Escolhemos uma caixa de volume fixo:



$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \quad , \quad \phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$\phi = 0 \, , \vec{\nabla}.\vec{A} = 0$$

$$+ \, formulas \; de \; Maxwell$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \left(c_{\vec{k}}(t) \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) + c^*_{\vec{k}}(t) \vec{u}^*_{\vec{k}}(\vec{r}) \right)}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_k \left(c_{\vec{k}}(t)\, \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) + c^*_{\vec{k}}(t)\, \vec{u}^*_{\vec{k}}(\vec{r}) \right)}$$

Solução de $\vec{\nabla}^2 \vec{u}_k(\vec{r}) + \frac{\omega_k^2}{c^2}\vec{u}_k(\vec{r}) = 0$

$$\vec{u}_{\vec{k},\alpha} = \hat{\epsilon}^{(\alpha)} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_k \left(c_{\vec{k}}(t)\, \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) + c^*_{\vec{k}}(t)\, \vec{u}^*_{\vec{k}}(\vec{r}) \right)}$$

Solução de $\vec{\nabla}^2 \vec{u}_k(\vec{r}) + \frac{\omega_k^2}{c^2}\vec{u}_k(\vec{r}) = 0$

$$\vec{u}_{\vec{k},\alpha} = \hat{\epsilon}^{(\alpha)} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_k \left(c_{\vec{k}}(t)\, \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) + c^*_{\vec{k}}(t)\, \vec{u}^*_{\vec{k}}(\vec{r}) \right)}$$

Solução de $\dfrac{\partial^2 \vec{c}_k(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 \vec{c}_k(t) = 0$

$$c_{\vec{k},\alpha}(t) = c_{\vec{k},\alpha}(0) e^{-i\omega_{\vec{k}} t}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_k \left(c_{\vec{k}}(t)\, \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) + c^*_{\vec{k}}(t)\, \vec{u}^*_{\vec{k}}(\vec{r}) \right)}$$

Solução de $\dfrac{\partial^2 \vec{c}_k(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 \vec{c}_k(t) = 0$

$$c_{\vec{k},\alpha}(t) = c_{\vec{k},\alpha}(0) e^{-i\omega_{\vec{k}} t}$$

Descomposição espectral do campo electromagnético

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1,2} c_{\vec{k},\alpha}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\epsilon}^{(\alpha)} + c^{\star}_{\vec{k},\alpha}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\epsilon}^{(\alpha)}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\alpha} \left(\hat{\epsilon}^{(\alpha)} \times \vec{k}\right) \left[c_{\vec{k},\alpha}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - c^{\star}_{\vec{k},\alpha}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]}$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\alpha} \omega_k \left[c_{\vec{k},\alpha}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - c^{\star}_{\vec{k},\alpha}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] \hat{\epsilon}^{(\alpha)}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{H = \sum_{\vec{k},\alpha} 2 \left(\frac{\omega_{\vec{k}}}{c}\right)^2 c_{\vec{k},\alpha}(t) c^{\star}_{\vec{k},\alpha}(t)}$$

Quadratura do campo

- Com a troca $c_{\vec{k},\alpha} = \frac{c}{2\,\omega_{\vec{k}}}\left[\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k},\alpha} + iP_{\vec{k},\alpha}\right]$ e $c^{\star}_{\vec{k},\alpha} = \frac{c}{2\,\omega_{\vec{k}}}\left[\omega_{\vec{k}} Q_{\vec{k},\alpha} - iP_{\vec{k}\alpha}\right]$

$$H = \sum_{\vec{k},\alpha} 2\left(\frac{\omega_{\vec{k}}}{c}\right)^2 c_{\vec{k},\alpha}(t) c^{\star}_{\vec{k},\alpha}(t) \longrightarrow \boxed{H = \sum_{\vec{k},\alpha} \frac{1}{2}\left(P^2_{\vec{k},\alpha}(t) + \omega^2_{\vec{k}} Q^2_{\vec{k},\alpha}(t)\right)}$$

- $Q_{\vec{k},\alpha}$ e $P_{\vec{k},\alpha}$ são as **variáveis canônicas.**
- O campo de radiação pode ser visto como uma **coleção de osciladores harmônicos independentes.**

Primeira quantização

- A primeira quantização consiste em atribuir um operador a uma quantidade física.
- $Q_{\vec{k},\alpha}$ e $P_{\vec{k},\alpha}$ são **operadores** que satisfazem as relações:

$$\left[Q_{\vec{k},\alpha}, P_{\vec{k}',\alpha'}\right] = i\hbar\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\alpha,\alpha'}$$
$$\left[Q_{\vec{k},\alpha}, Q_{\vec{k}',\alpha'}\right] = 0$$
$$\left[P_{\vec{k},\alpha}, P_{\vec{k}',\alpha'}\right] = 0 \,.$$

- Substituindo os coeficientes de Fourier pelos operadores de criação e aniquilação: $c_{\vec{k},\alpha} \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_{\vec{k}}}} a_{\vec{k},\alpha}$, o hamiltoniano quantizado fica como:

$$\boxed{H = \sum_{\vec{k},\alpha} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}(t) a_{\vec{k},\alpha}(t) + \frac{1}{2} \right)}$$

Flutuações do vácuo quântico

$$\vec{E} = -i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2V\epsilon_0}} \left[a_{\vec{k}} e^{i\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \hat{\epsilon}$$

Flutuações do vácuo quântico

$$\vec{E} = -i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}} \left[a_{\vec{k}} e^{i\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \hat{\epsilon}$$

- A flutuação estadística do campo elétrico é: $\Delta E = \sqrt{\langle \vec{E}^2 \rangle - \langle \vec{E} \rangle^2}$

Flutuações do vácuo quântico

$$\vec{E} = -i\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}}\left[a_{\vec{k}}e^{i\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^{\dagger}_{\vec{k}}e^{-i\omega_k t+\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]\hat{\epsilon}$$

- A flutuação estadística do campo elétrico é: $\Delta E = \sqrt{\langle\vec{E}^2\rangle - \langle\vec{E}\rangle^2}$

$$\rightarrow \langle n_k|\vec{E}|n_k\rangle = 0$$

Flutuações do vácuo quântico

$$\vec{E} = -i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}} \left[a_{\vec{k}} e^{i\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \hat{\epsilon}$$

- A flutuação estadística do campo elétrico é: $\Delta E = \sqrt{\langle \vec{E}^2 \rangle - \langle \vec{E} \rangle^2}$

$$\rightarrow \langle n_k | \vec{E} | n_k \rangle = 0$$

$$\rightarrow \langle n_k | \vec{E}^2 | n_k \rangle = \frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0} \langle n_k | a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger + a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | n_k \rangle$$

Flutuações do vácuo quântico

$$\vec{E} = -i\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}}\left[a_{\vec{k}}e^{i\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{\vec{k}}e^{-i\omega_k t+\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]\hat{\epsilon}$$

- A flutuação estadística do campo elétrico é: $\Delta E = \sqrt{\langle\vec{E}^2\rangle - \langle\vec{E}\rangle^2}$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \langle n_k|\vec{E}|n_k\rangle &= 0 \\
\rightarrow \langle n_k|\vec{E}^2|n_k\rangle &= \frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}\langle n_k|a_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}} + a^\dagger_{\vec{k}}a_{\vec{k}}|n_k\rangle \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{V\epsilon_0}\langle n_k|N_{\vec{k}} + \frac{1}{2}|n_k\rangle
\end{aligned}$$

Flutuações do vácuo quântico

$$\vec{E} = -i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}} \left[a_{\vec{k}} e^{i\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r}} - a^{\dagger}_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \hat{\epsilon}$$

- A flutuação estadística do campo elétrico é: $\Delta E = \sqrt{\langle \vec{E}^2 \rangle - \langle \vec{E} \rangle^2}$

$$\rightarrow \langle n_k | \vec{E} | n_k \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \langle n_k | \vec{E}^2 | n_k \rangle &= \frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0} \langle n_k | a_{\vec{k}} a^{\dagger}_{\vec{k}} + a^{\dagger}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} | n_k \rangle \\ &= \frac{\hbar\omega_k}{V\epsilon_0} \langle n_k | N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} | n_k \rangle \\ &= \frac{\hbar\omega_k}{V\epsilon_0} \langle n_k | n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} | n_k \rangle \end{aligned}$$

Flutuações do vácuo quântico

$$\vec{E} = -i \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}} \left[a_{\vec{k}} e^{i\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r}} - a^{\dagger}_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + \vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \hat{\epsilon}$$

- A flutuação estadística do campo elétrico é: $\Delta E = \sqrt{\langle \vec{E}^2 \rangle - \langle \vec{E} \rangle^2}$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \langle n_k | \vec{E} | n_k \rangle &= 0 \\
\rightarrow \langle n_k | \vec{E}^2 | n_k \rangle &= \frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0} \langle n_k | a_{\vec{k}} a^{\dagger}_{\vec{k}} + a^{\dagger}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} | n_k \rangle \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{V\epsilon_0} \langle n_k | N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} | n_k \rangle \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{V\epsilon_0} \langle n_k | n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} | n_k \rangle \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{V\epsilon_0} (n_{\vec{k}} + \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Flutuações do vácuo quântico

$$\vec{E} = -i\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}}\left[a_{\vec{k}}e^{i\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_{\vec{k}}^{\dagger}e^{-i\omega_k t+\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]\hat{\epsilon}$$

- A flutuação estadística do campo elétrico é: $\Delta E = \sqrt{\langle \vec{E}^2\rangle - \langle \vec{E}\rangle^2}$

$$\rightarrow \langle n_k|\vec{E}|n_k\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \langle n_k|\vec{E}^2|n_k\rangle &= \frac{\hbar\omega_k}{2V\epsilon_0}\langle n_k|a_{\vec{k}}a_{\vec{k}}^{\dagger} + a_{\vec{k}}^{\dagger}a_{\vec{k}}|n_k\rangle \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{V\epsilon_0}\langle n_k|N_{\vec{k}} + \frac{1}{2}|n_k\rangle \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{V\epsilon_0}\langle n_k|n_{\vec{k}} + \frac{1}{2}|n_k\rangle \\
&= \frac{\hbar\omega_k}{V\epsilon_0}(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2}) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta E = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{V\epsilon_0}}\sqrt{\left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right)}}
\end{aligned}$$

- Para $n_k = 0$, temos a **flutuação do vácuo quântico**: $\boxed{\Delta E = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2V\epsilon_0}}}$

Interação do átomo com o campo quantizado

- Hamiltoniano do sistema átomo-campo é:

$$H = H_{atomo} + H_{campo} + H_{dipolar} \ ,$$

  e a perturbação é dada pelo momento dipolar: $H_{dipolar} = -\vec{d} \cdot \vec{E}$.
- A probabilidade de transição de um estado inicial a um estado final por unidade de tempo gerada por o hamiltoniano de perturbação é proporcional aos elementos da matriz da perturbação.

$$\vec{E} = -i\vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2V\epsilon}}(a - a^\dagger) = -\vec{E}_0(a - a^\dagger)$$
$$\longrightarrow H_{dipolar} = \vec{d} \cdot \vec{E}_0(a - a^\dagger)$$

Interação do átomo com o campo quantizado

- $|r\rangle$ e $|s\rangle$ são os níveis atômicos do átomo e n são os fótons do campo.

$$estado\ inicial \left\{ \begin{array}{ll} |i\rangle = |r\rangle|n\rangle & E_i = E_r + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{array} \right.$$

$$estados\ finais \left\{ \begin{array}{ll} |f_1\rangle = |s\rangle|n-1\rangle & E_{f_1} = E_s + \hbar\omega\left((n-1) + \frac{1}{2}\right) \\ |f_2\rangle = |s\rangle|n+1\rangle & E_{f_2} = E_s + \hbar\omega\left((n+1) + \frac{1}{2}\right) \end{array} \right.$$

Interação do átomo com o campo quantizado

- Lembrando que $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- Absorção:

$$\langle f_1|H_{dipolar}|i\rangle = \langle s, n-1|H_{dipolar}|r, n\rangle$$

Interação do átomo com o campo quantizado

- Lembrando que $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- Absorção:

$$\begin{aligned}\langle f_1|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s, n-1|H_{dipolar}|r, n\rangle \\ &= \langle s, n-1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a - a^\dagger)|r, n\rangle\end{aligned}$$

Interação do átomo com o campo quantizado

- Lembrando que $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- Absorção:

$$\begin{aligned}\langle f_1|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s, n-1|H_{dipolar}|r, n\rangle \\ &= \langle s, n-1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a-a^\dagger)|r, n\rangle \\ &= \langle s|\vec{d}|r\rangle \cdot \vec{E}_0\sqrt{n}\end{aligned}$$

Interação do átomo com o campo quantizado

- Lembrando que $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- Absorção:

$$\begin{aligned}\langle f_1|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s,n-1|H_{dipolar}|r,n\rangle \\ &= \langle s,n-1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a-a^\dagger)|r,n\rangle \\ &= \langle s|\vec{d}|r\rangle\cdot\vec{E}_0\sqrt{n}\end{aligned}$$

- Emissão:

$$\langle f_2|H_{dipolar}|i\rangle = \langle s,n+1|H_{dipolar}|r,n\rangle$$

Interação do átomo com o campo quantizado

- Lembrando que $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- Absorção:

$$\begin{aligned}\langle f_1|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s, n-1|H_{dipolar}|r, n\rangle \\ &= \langle s, n-1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a-a^\dagger)|r, n\rangle \\ &= \langle s|\vec{d}|r\rangle\cdot\vec{E}_0\sqrt{n}\end{aligned}$$

- Emissão:

$$\begin{aligned}\langle f_2|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s, n+1|H_{dipolar}|r, n\rangle \\ &= \langle s, n+1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a-a^\dagger)|r, n\rangle\end{aligned}$$

Interação do átomo com o campo quantizado

- Lembrando que $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- Absorção:

$$\begin{aligned}\langle f_1|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s, n-1|H_{dipolar}|r, n\rangle \\ &= \langle s, n-1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a-a^\dagger)|r, n\rangle \\ &= \langle s|\vec{d}|r\rangle\cdot\vec{E}_0\sqrt{n}\end{aligned}$$

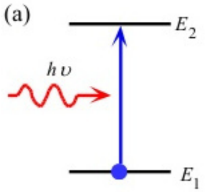
- Emissão:

$$\begin{aligned}\langle f_2|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s, n+1|H_{dipolar}|r, n\rangle \\ &= \langle s, n+1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a-a^\dagger)|r, n\rangle \\ &= \langle s|\vec{d}|r\rangle\cdot\vec{E}_0\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

Interação do átomo com o campo quantizado

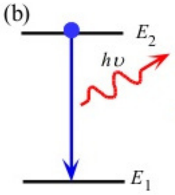
- Absorção (a):

$$\begin{aligned}\langle f_1|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s, n-1|H_{dipolar}|r, n\rangle \\ &= \langle s, n-1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a-a^\dagger)|r, n\rangle \\ &= \langle s|\vec{d}|r\rangle\cdot\vec{E}_0\sqrt{n}\end{aligned}$$



- Emissão espontânea (b):

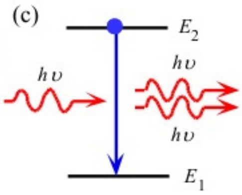
$$\begin{aligned}\langle f_2|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s, n+1|H_{dipolar}|r, n\rangle \\ &= \langle s, n+1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a-a^\dagger)|r, n\rangle \\ &= \langle s|\vec{d}|r\rangle\cdot\vec{E}_0\sqrt{1}\end{aligned}$$



Interação do átomo com o campo quantizado

- Emissão estimulada (c):

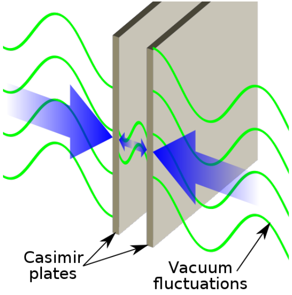
$$\begin{aligned}\langle f_2|H_{dipolar}|i\rangle &= \langle s, n+1|H_{dipolar}|r, n\rangle \\ &= \langle s, n+1|\vec{d}\cdot\vec{E}_0(a-a^\dagger)|r, n\rangle \\ &= \langle s|\vec{d}|r\rangle\cdot\vec{E}_0\sqrt{n+1}\end{aligned}$$



Efeito Casimir

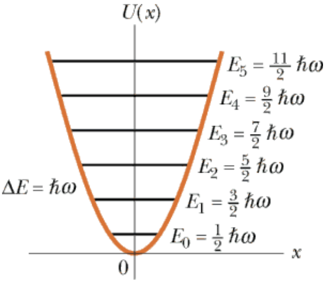
- Dadas duas placas de metal descarregadas e separadas por uma distancia muito pequena, existe uma força f entre elas que tende a aproximá-las.

$$f = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4}$$



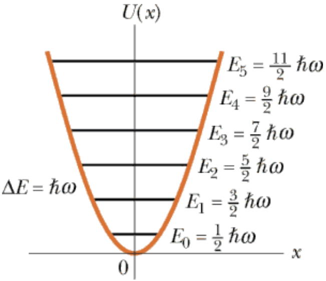
Muchas Gracias!!

Flutuações do vácuo quântico



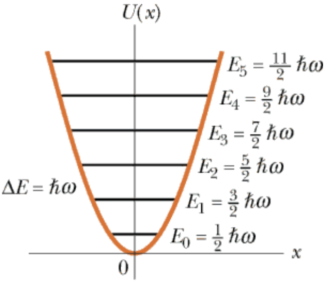
$$H = \sum_{\vec{k},\alpha} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}(t) a_{\vec{k},\alpha}(t) + \frac{1}{2} \right)$$

Flutuações do vácuo quântico



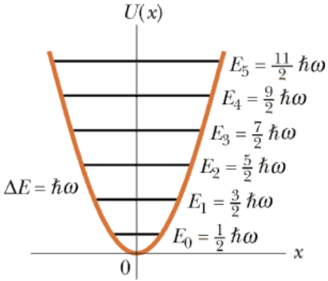
$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a^{\dagger}_{\vec{k}}(t) a_{\vec{k}}(t) + \frac{1}{2} \right)$$

Flutuações do vácuo quântico



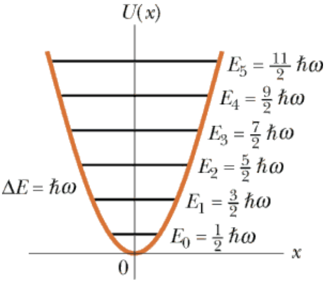
$$\epsilon = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(n_k + \frac{1}{2} \right)$$

Flutuações do vácuo quântico



$$\epsilon = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2}\right)$$

Flutuações do vácuo quântico



$$\epsilon = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2}\right) \to \infty$$